Федеральная служба по экологическому, технологическому и атомному надзору

ФЕДЕРАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

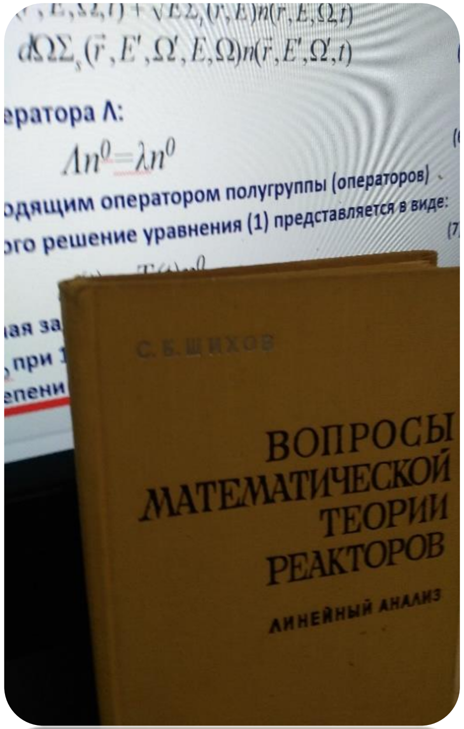
«Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности»

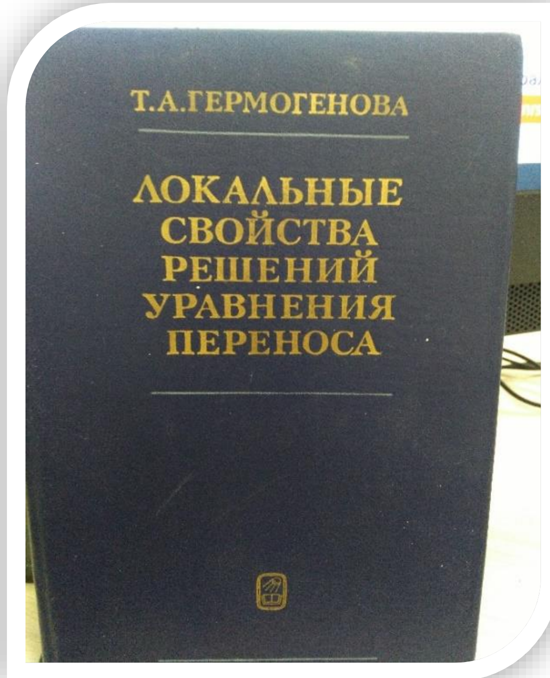
Дополнительное свойство решения нестационарного уравнения переноса

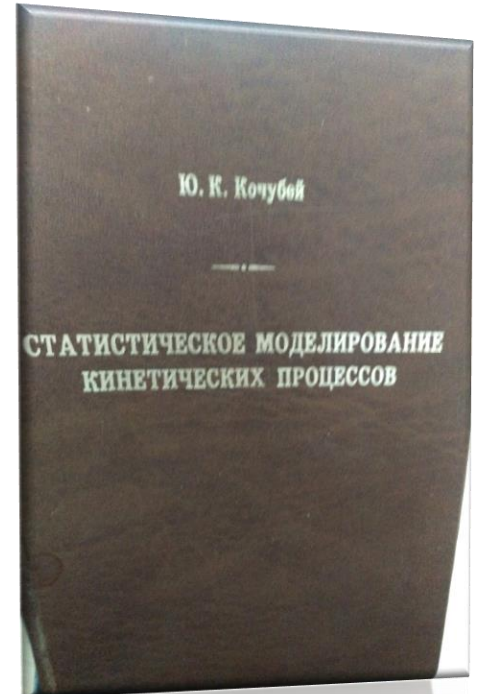
А.И. Попыкин, ФБУ «НТЦ ЯРБ», Москва

Научно-техническая конференция
«Нейтронно-физические проблемы атомной энергетики (Нейтроника-2024)»
31 мая 2024 г.

Основные ссылки







- С.Б. Шихов. Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ. Атомиздат. М., 1972 .
- А.Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. М.: Наука. Физматлит. 1996 г.
- Т.А.Гермогенова. Локальные свойства решений уравнения переноса. М., Наука 1986
- Ю.К.Кочубей Статистическое моделирование кинетических процессов. Монография. Саров 2004.

Нестационарная задача относительно плотности нейтронов без учета запаздывающих нейтронов:

$$\frac{dn}{dt} = \Lambda n(t) = (-L + K)n(t)\ldots \qquad n(0)=n^0 \qquad (1)$$

где

L – оператор переноса нейтронов; $K=K_{i,s}+K_f$ – сумма операторов рассеяния и деления.

Операторы деления (источника нейтронов), переноса и рассеяния определяются следующим образом:

$$K_f n = \int dE \int d\Omega \nu \Sigma_f(\vec{r}, E) n(\vec{r}, E, \Omega, t)$$

$$Ln = -\sqrt{E}\Omega\nabla n(\vec{r}, E, \Omega, t) + \sqrt{E}\Sigma_t(r, E) n(\vec{r}, E, \Omega, t)$$

$$K_{i,s} n = \int dE \int d\Omega \Sigma_s(\vec{r}, E', \Omega', E, \Omega) n(\vec{r}, E', \Omega', t)$$

Спектральная задача для оператора Λ:

$$\Lambda n^0 = \lambda n^0 \qquad (2)$$

Оператор Λ является производящим оператором полугруппы (операторов) класса C_0, с помощью которого решение уравнения (1) представляется в виде:

$$n(t) = T(t) n^0 \qquad (3)$$

Задача (1), и спектральная задача (2) рассматриваются в лебеговых пространствах функций L^p_D при $1 \le p \le \infty$, для которых существует интеграл от модуля этой функции в степени p.

Приведем асимптотическое представление для полугруппы:

$$n(t)= T(t)n^0 \to Ce^{-\beta t}n^0{}_0,\ при\ t \to \infty,\ C=(\ n^{0+}{}_0, n^0). \qquad (4)$$

Устанавливается u0 – положительность оператора T(t), то есть, что для любой функции из конуса (неотрицательной функции) n^0 имеет место неравенство:

$$T(t)n^0 \geq C(n^0,t)u_0, \qquad (5)$$

где:

$C(n^0,t)>0$, $u_0>0$ на всей области D.

Из (4) и (5) следует, что, начиная с некоторого момента времени t_0, детектор, помещенный в любую точку области, в которой рассматривается перенос нейтронов, зафиксирует сигнал.

В соответствующих операторных пространствах имеет решение операторное уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = \Lambda T(t)$$

$$T(0)=I,$$

где:

I – единичный оператор.

(O, F, P) - вероятностное пространство,

где **O** - пространство элементарных событий,

F - **σ** – алгеброй событий (Борелевское множество),

P - неотрицательная счетно-аддитивная функция множества.

X- банахово пространство, **χ** - **σ** - алгебра его подмножеств, **t** - время, $t \subseteq [0, \infty)$.
X обычно называют фазовым пространством.

Случайный процесс $\xi_t(\omega)$ –отображение прямого произведения O$\times[0,\infty)$ в X.

Функция P (s, x, t, Γ), s≤t, определенная для x □ X, Γ □ χ называется переходной функцией (марковской переходной функцией), если:

- при фиксированных s, x, t P (s, x, t,*) – вероятностная мера на σ-алгебре χ , т.е. P(s, x, t, X) = 1;
- при фиксированных s, t, Γ функция измерима по x, относительно σ-алгебры χ;
- при s= t это единичная мера, сосредоточенная в точке x: P (s, x, s, Γ) = δ_x , равная 1, когда x □ Γ, и 0, когда x не принадлежит Γ;
- для любых s ≤ t ≤ u, x □ X, Γ □ χ,

$$P(s,x,u,\Gamma) = \int_X P(s,x,t,dy)P(t,y,s,\Gamma)$$

уравнение Чепмена - Колмогорова

Бинмиальное распределение

.

$$P_{n,m} = C_n^m p^n q^m \qquad p + q = 1$$

Экспоненциальное распределение

np=a

Функция P (s, x, t, Γ), s≤t, определенная для x □ X, Γ □ χ называется переходной функцией (марковской переходной функцией), если:

- при фиксированных s, x, t P (s, x, t,*) – вероятностная мера на σ-алгебре χ , т.е. P(s, x, t, X) = 1;
- при фиксированных s, t, Γ функция измерима по x, относительно σ-алгебры χ;
- при s= t это единичная мера, сосредоточенная в точке x: P (s, x, s, Γ) = δ_x , равная 1, когда x □ Γ, и 0, когда x не принадлежит Γ;
- для любых s ≤ t ≤ u, x □ X, Γ □ χ,

$$P(s,x,u,\Gamma) = \int_X P(s,x,t,dy)P(t,y,s,\Gamma)$$

уравнение Чепмена - Колмогорова

Марковский процесс – такой процесс, который не зависит от любых событий до момента s.
Рассматриваются только однородные и стационарные строго марковские процессы. В этом случае переходная функция определяется только уравнением Чепмена-Колмогорова и, этом случае марковскому процессу (переходной функции ставится в соответствие определенная выше полугруппа класса C_0
Условие существования однородного стационарного марковского процесса, соответствующего полугруппе:

$$T(t)\,C(X)\subset C(X),\ (6)$$

$C(X)$ - пространство непрерывных функций, определенных на фазовом пространстве X с нормой

$$\|f\| = \sup_X |f(x)|$$

Случайный процесс, которому соответствует полугруппа $T(t)$ называется феллеровским, а соответствующая полугруппа феллеровской.
Для такого процесса и соответствующей ему полугруппы утверждения обратимы.

Комментарии (1)

1 Все утвержения справедливы для сопряженных операторов.

2. Областью определения оператора *L*, а, следовательно, и *Λ* является множество функций $f \in R_D^p \subset C$ таких, что: функция f абсолютно непрерывна на отрезке $[-s_0(\vec{r}, \Omega), s^0(\vec{r}, \Omega)]$; $f = 0$ в точке $-s_0(\vec{r}, \Omega)$; $Lf(\Lambda f) \subset C$. Так же l (λ)Kf ⊂ C. l –оператор обратный к L, λ-спектральный параметр. Это утверждение получен Т.А. Гермогеновой. Его достаточно для выполнения условия (6), то есть для существования феллеровской полугруппы.

3. Ранее это получено в монографии Кочубея Ю.К. Здесь оно получено в другой постановке.

Комментарии (2)

1. Возмущенная полугруппа

$$T(-L+K,t)=\sum_{i=0} s_i \quad s_0=T(-L,T)$$

$$s_i=\int_0^t du s_0(u)Ks_{i-1}(t-u)$$

Величина s_2 оценивается снизу, откуда следует оценка полугруппы:

$$T(t)n^0 \geq C(n^0,t)u_0)$$

Этот результат содержится (и является одним из основных) в монографии С.Б. Шихова. Доказательство при надлежит А.А.Шкурпелову.

Простое действительное собственное значение, которому отвечает собственная неотрицательная собственная функция называется ведущим. Из неравенства u0 следует наличие ведущих собственных значений у операторов Λ

T(t) и асимптотическое представление полугруппы, указанное в начале презентации.

ВЫВОД

Решению нестационарного уравнения переноса соответствует марковский случайный процесс, имеющий экспоненциальную асимптотику. Это является следствием одного из (основных) результатов теории, представленной в монографии Шихова С.Б.

Спасибо за внимание!

Соотношения (8) и (9) справедливы и для сопряженного оператора *T⁺(t)*, который мы обозначим через *P(t)*.
Тогда существуют решения операторных уравнений:

$$\frac{dP}{dt} = P(t)\Lambda^{+} \quad (12) \qquad \frac{dP^{+}}{dt} = \Lambda P^{+}(t) \quad (13) \qquad P(0)=P^{+}(0)=I. \quad (14)$$

Марковский процесс – это такой случайный процесс, в котором реализация некоторого случайного распределения на данном шаге по времени зависит только от распределения на предыдущем шаге.

Оператор P(t) определяет переходную функцию. Его также называют марковской полугруппой.

Если имеется полугруппа *P(t)*, которой соответствует производящий оператор *Λ* и имеют место соотношения (12)-(14), то *P(t)* может быть переходным оператором (переходной вероятностью) для некоторого марковского процесса.

$$P(t)n^{+} = \int_X p(x,x',t)n^{+}(x')dx' \quad (15)$$

где
x – переменная фазового пространства;
p(x, x´,t) положительная функция.